

Управление в технических системах

© 2025 г. В.Н. ЧЕСТНОВ, д-р техн. наук (vnchest@yandex.ru),
Д.В. ШАТОВ, канд. техн. наук (dvshatov@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

Рассматриваются линейные многомерные объекты управления, подверженные действию неизвестных ограниченных внешних возмущений. Предлагается метод синтеза дискретных регуляторов по выходу, который обеспечивает желаемые или достижимые показатели качества: точность, быстродействие и запасы устойчивости по каждому контуру управления на входе объекта. Предлагаемый подход к синтезу основан на стандартной процедуре H_∞ -оптимизации, сформулированной особым образом. Робастные свойства синтезированных систем исследуются с помощью годографов Найквиста отдельных контуров управления, разомкнутых по входам объекта. Доказана абсолютная устойчивость замкнутой системы с секторными нелинейностями на входе объекта и связь с радиусами запасов устойчивости. Численный пример демонстрирует эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: линейные многомерные системы, синтез дискретных регуляторов, ограниченные внешние возмущения, ошибки регулирования, радиус запасов устойчивости, время регулирования, абсолютная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231025030059, **EDN:** IEKSYA

1. Введение

Цифровые регуляторы заняли главенствующее положение в промышленности, энергетике, авиации, робототехнике и многих других отраслях, поэтому задача синтеза дискретных регуляторов многомерных систем по инженерным показателям качества приобретает невиданную ранее актуальность и важность в связи с реальными запросами инженеров-проектировщиков.

Вместе с тем современные техники синтеза регуляторов по измеряемому выходу H_2 , H_∞ , L_1 (l_1), μ -синтеза, а также методы модального управления, как правило, учитывают лишь отдельные показатели качества либо не учитывают их вовсе.

В классической теории автоматического управления, которая базировалась на частотных методах, опирающихся на критерий Найквиста, инженерные показатели качества напрямую использовались при построении регуляторов одномерных систем [1, 2]. Эти результаты были обобщены во многом благодаря усилиям В.В. Солодовникова в знаменитом методе ЛАЧХ [3, 4],

который показал непревзойденную и по сей день практическую эффективность на протяжении последних 75 лет. В дискретном случае он приобрел законченный вид благодаря работам В.А. Бесекерского и др. [5, 6]. Однако уже в одномерном случае была очевидна противоречивость инженерных показателей качества, характеризующих точность, быстродействие и запасы устойчивости. К сожалению, метод ЛАЧХ по самой его сути невозможно в общем случае использовать для многомерных систем. Трудности математической формализации инженерных показателей качества и развитие соответствующего аппарата долгое время оставались вне поля зрения математиков, и только с появлением теории L_1 - (l_1 -) оптимизации [7, 8] и H_∞ -оптимизации [9–11] критерии точности (максимальная ошибка по каждой регулируемой переменной) при произвольных ограниченных внешних возмущениях и H_∞ -норма матрицы чувствительности стали использоваться в качестве показателей точности и робастности в теории многомерных систем. Вместе с тем анализ простейших примеров показывает [12], что l_1 -регуляторы дают максимально возможный коэффициент усиления разомкнутой системы при условии устойчивости замкнутой системы. Это, однако, ведет к малым запасам устойчивости по фазе и модулю, определяемым с помощью годографа Найквиста разомкнутой системы, что недопустимо на практике. Помимо этого, порядок дискретных l_1 -регуляторов может быть непредсказуемо высоким [8], что так же не приветствуется на практике и одновременно приводит к неизбежному снижению запасов устойчивости [12]. Непрерывные L_1 -регуляторы вообще имеют иррациональные передаточные функции [7], что сильно снижает их практический потенциал.

Метод инвариантных эллипсоидов [13] снял принципиальные ограничения реализуемости L_1 - (l_1 -) регуляторов, однако вопрос о запасах устойчивости по фазе и модулю, приемлемых с практической точки зрения, пока еще открыт в этом перспективном подходе.

В настоящей работе запасы устойчивости системы оцениваются радиусом запасов устойчивости [14, 15]. Он определяется максимальным радиусом круга с центром в критической точке $(-1, j0)$, который не пересекается годографом Найквиста разомкнутой системы, см., например, [16], где эта величина называется “stability radius”.

Синтез дискретных регуляторов по измеряемому выходу осложняется следующими важными факторами:

1. Даже регулятор по полному вектору состояния [12, 17], вообще говоря, не обеспечивает приемлемый на практике радиус запасов устойчивости. Это заведомо возможно только для устойчивых объектов при малом периоде дискретности.

2. Достижимая ошибка регулирования для дискретных регуляторов по полному вектору состояния (и тем более по выходу) ограничена снизу некоторой величиной, меньше которой не может обеспечить никакой линейный регулятор [18].

3. Даже в непрерывном случае быстродействие системы (характеризуемое степенью устойчивости) ограничено абсолютным значением вещественной части нуля объекта, ближайшего к мнимой оси [16, 19, 20]. При этом увеличение степени устойчивости приводит к катастрофическому уменьшению радиуса запасов устойчивости, что неприменимо на практике. Аналогичные явления имеют место и в дискретном случае [12, 17].

Настоящая работа посвящена проблеме синтеза дискретных регуляторов для многомерных объектов по заданным или достижимым инженерным показателям качества: ошибке регулирования по каждой регулируемой переменной, времени регулирования и радиусу запасов устойчивости на входе объекта. Решение такой задачи опирается на специальным образом сконструированную задачу H_∞ -оптимизации. В этом смысле предлагаемый подход развивает результат работы [17] введением в рассмотрение неизмеряемых полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами (с ограниченной суммой амплитуд гармоник по каждой компоненте возмущения), частотами и неограниченным их числом. Такой класс внешних возмущений покрывает все реально действующие на практике сигналы, приводящие в системах стабилизации к отклонению регулируемых переменных от нуля [21]. Настоящая работа является расширенным изложением докладов авторов [22, 23].

2. Постановка задачи

Рассматривается управляемая и наблюдаемая дискретная модель непрерывного объекта управления, описываемая разностными уравнениями

$$(1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B[u(k) + w(k)], \\ y(k) &= Cx(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ – управление (вход объекта), $y(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ – измеряемый и одновременно регулируемый выход объекта (вход регулятора), $w(k) \in \mathbb{R}^m$ – вектор внешних возмущений. Матрицы объекта A, B, C известны.

Объект (1) замыкается дискретным стабилизирующим динамическим регулятором по выходу:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_c y(k), \\ u(k) &= C_c x_c(k) + D_c y(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $x_c(k) \in \mathbb{R}^{n_c}$ – вектор состояния регулятора ($n_c \leq n$), и A_c, B_c, C_c, D_c – матрицы чисел.

Компоненты возмущения w являются ограниченными функциями:

$$(3) \quad w_i(k) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \sin(\omega_j kh + \phi_{ij}), \quad i = \overline{1, m},$$

где h – период дискретности. Амплитуды $w_{ij} \geq 0$, фазы ϕ_{ij} , $i = \overline{1, m}$ и частоты ω_j , $j = \overline{1, \infty}$ компонент внешнего возмущения неизвестны.

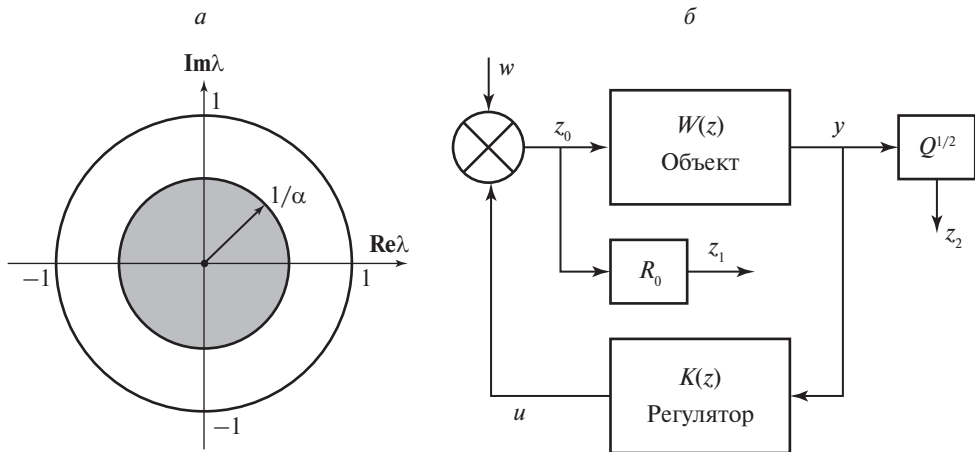


Рис. 1. *a* – Область расположения собственных чисел A_{cl} ; *б* – структурная схема замкнутой системы управления.

Предполагается, что внешнее возмущение ограничено в следующем смысле:

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \leq w_i^*, \quad i = \overline{1, m},$$

где w_i^* – заданные числа. Это означает, что $\forall k: |w_i(k)| \leq w_i^*$.

Ошибки по регулируемым переменным определяются следующими соотношениями:

$$(5) \quad y_{i,st} = \sup_{k \geq k_p} |y_i(k)|, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где k_p – число, определяющее время регулирования системы $t_p = k_p h$.

Число тактов k_p определяется степенью устойчивости дискретной системы $1/\alpha$, что означает выполнение условия:

$$|\lambda_i(A_{cl})| \leq \frac{1}{\alpha}, \quad i = \overline{1, n + n_c},$$

где $\lambda_i(\cdot)$ – собственные числа матрицы A_{cl} замкнутой системы (1), (2):

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}.$$

Геометрическая интерпретация последнего неравенства для $\lambda_i(A_{cl})$ приведена на рис. 1, *a*.

В практических задачах требуемое значение α выбирается исходя из желаемого значения k_p ($t_p = k_p h$) по условию [17]:

$$(6) \quad \alpha \approx e^{(3h)/t_p},$$

которое следует из известной связи $\alpha = e^{\beta h}$ между собственными значениями непрерывной и дискретной систем (имеется в виду, что степень устойчивости непрерывной системы β связана с временем регулирования приближенным соотношением $t_p \approx 3/\beta$). Соотношение (6) дает приемлемую с инженерной точки зрения точность оценки при условии, что среди собственных чисел матрицы A_{cl} нет кратных, которые лежат ближе всего к окружности радиуса $1/\alpha$, что, как правило, всегда выполняется в практических задачах.

Замкнутая система (1), (2) обладает радиусами запасов устойчивости $0 < r_i < 1$, $i = \overline{1, m}$ на физическом входе объекта, если для диагональной матрицы радиусов $R = \text{diag}[r_1, \dots, r_m]$ выполняется следующее частотное неравенство [22]:

$$(7) \quad \left[I + W(e^{-j\omega h}) \right]^T \left[I + W(e^{j\omega h}) \right] > R^2, \quad \omega \in [0, \pi/h],$$

где $W(z) = -K(z)W_0(z)$ – передаточная матрица системы (1), (2) с точками размыкания на физическом входе объекта, а $W_0(z) = C(zI - A)^{-1}B$ – передаточная матрица объекта по управлению, $K(z) = C_c(zI - A_c)^{-1}B_c + D_c$ – передаточная матрица регулятора.

Требования к точности системы выражаются неравенствами вида

$$(8) \quad y_{i,st} \leq y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где $y_i^* > 0$ – заданные числа (желаемые ошибки регулирования).

Неравенства (8) не всегда являются реализуемыми (не для любых y_i^* , $i = \overline{1, m_2}$ можно найти соответствующий регулятор), так же как требования (6) и (7) для времени регулирования и радиусов запасов устойчивости. Все эти требования являются взаимно противоречивыми [12].

Задача 1. Найти стабилизирующий регулятор (2) такой, что:

1) *выполняются требования к точности:*

$$(9) \quad y_{i,st} \leq \gamma y_i^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

где $\gamma > 0$ – некоторое достижимое число;

2) *система (1), (2) обладает некоторыми достижимыми радиусами запасов устойчивости r_i , $i = \overline{1, m}$ в неравенстве (7);*

3) *собственные числа матрицы A_{cl} замкнутой системы (1), (2) удовлетворяют условию $|\lambda_i(A_{cl})| \leq 1/\alpha$, $i = \overline{1, n + n_c}$, где $\alpha > 1$ – некоторое достижимое число.*

В условиях (9) коэффициент γ – некоторое число (обычно $\gamma > 1$), которое показывает степень завышенности исходных требований к точности (8) по сравнению с реально достижимыми (9).

3. Решение задачи, основанное на H_∞ -оптимизации

Для решения задачи 1 с помощью H_∞ -оптимизации необходимо представить уравнения замкнутой системы (1), (2) в терминах передаточных матриц:

$$(10) \quad \begin{aligned} y &= W_0(z)z_0, \quad u = K(z)y, \\ z_0 &= u + w, \quad z_1 = R_0z_0, \quad z_2 = Q^{1/2}y, \end{aligned}$$

где $z_1 \in \mathbb{R}^m$ и $z_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ – векторы регулируемых переменных, используемые при синтезе, причем z_1 определяет желаемые радиусы запасов устойчивости на входе объекта, а z_2 обеспечивает точность; $R_0 = \text{diag} [r_1^0, \dots, r_m^0]$, $r_i^0 \in (0, 1)$, $i = \overline{1, m}$ – матрица желаемых радиусов запасов устойчивости, $Q^{1/2}$ – диагональная весовая матрица. Система уравнений (10) изображена в виде структурной схемы на рис. 1,б.

Векторы w и z_0 связаны передаточной матрицей чувствительности по входу

$$T_{z_0w} = [I + W(z)]^{-1},$$

которая используется при синтезе для обеспечения запасов устойчивости (7).

Вектор регулируемых переменных $z_2 = Q^{1/2}y$ вводится для обеспечения требований к точности (8), (9). Он представляет собой вектор y , взвешенный диагональной матрицей $Q = \text{diag} [q_1, \dots, q_{m_2}]$ с положительными элементами $q_i > 0$, $i = \overline{1, m_2}$. Выбор элементов матрицы Q обеспечивает требуемую (или достижимую) точность по регулируемым переменным y_i , $i = \overline{1, m_2}$, что доказывается далее.

Введем расширенный вектор регулируемых переменных $z^\top = [z_1^\top, z_2^\top]$, а матрицу, связывающую z с вектором w , обозначим через T_{zw} , тогда

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{zw}w = \begin{bmatrix} T_{z_1w} \\ T_{z_2w} \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} R_0T_{z_0w} \\ Q^{1/2}T_{yw} \end{bmatrix} w,$$

где $T_{yw} = W_0(z)[I + W(z)]^{-1}$ – передаточная матрица, связывающая w и y .

Желаемое время регулирования обеспечивается, если собственные числа матрицы A_{cl} замкнутой системы (1), (2) удовлетворяют неравенству $|\lambda_i(A_{cl})| \leq 1/\alpha$. Для обеспечения этого условия используется прием [24]: матрицы объекта управления A , B заменяются на смещенные $\tilde{A} = \alpha A$, $\tilde{B} = \alpha B$, после чего ищется смещенный регулятор, стабилизирующий смещенную замкнутую систему:

$$(11) \quad \begin{aligned} |\lambda_i(\tilde{A}_{cl})| &= |\lambda_i(A_{cl})|\alpha < 1, \quad i = \overline{1, n + n_c}, \\ \tilde{A}_{cl} &= \begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{B}D_cC & \tilde{B}C_c \\ \tilde{B}_cC & \tilde{A}_c \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где \tilde{A}_c , \tilde{B}_c , C_c , D_c – матрицы смещенного регулятора.

Регулятор по выходу (2) для исходной, не смещенной, задачи, который обеспечивает желаемую степень устойчивости системы (а также требования к запасам устойчивости и точности), имеет матрицы [17, 24]:

$$(12) \quad A_c = \tilde{A}_c/\alpha, \quad B_c = \tilde{B}_c/\alpha, \quad C_c, \quad D_c.$$

Замечание 1. В иностранной литературе хорошо известен аналог приема [24], но исключительно для регуляторов по полному вектору состояния (см., например, [25]). Для регуляторов же по измеряемому выходу в непрерывном и дискретном случаях такой подход впервые появился в отечественной литературе (см. [24] и библиографию там).

Пусть регулятор с матрицами $\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, C_c, D_c$ решает задачу минимизации H_∞ -нормы передаточной матрицы смещенной замкнутой системы (с матрицами \tilde{A}, \tilde{B}):

$$(13) \quad \|T_{zw}(e^{(-\beta+j\omega)h})\|_\infty < \gamma,$$

где γ – заданное или минимизируемое число.

Замечание 2. Если решена смещенная задача (13), то регулятор (2) с матрицами (12) также обеспечивает выполнение соответствующих частотных неравенств для несмещенной передаточной матрицы [17, 24], поэтому для решения смещенной задачи (13) справедливо

$$(14) \quad \|T_{zw}(e^{j\omega h})\|_\infty < \gamma,$$

тогда каждый блок этой матрицы удовлетворяет условию, аналогичному (14), в частности см. [26]:

$$(15) \quad \|R_0 T_{z_0 w}(e^{j\omega h})\|_\infty < \gamma, \quad \|Q^{1/2} T_{yw}(e^{j\omega h})\|_\infty < \gamma.$$

Первое неравенство в (15) можно представить в эквивалентной форме [17, 19]

$$[I + W(e^{-j\omega h})]^\top [I + W(e^{j\omega h})] > R^2, \quad \omega \in [0, \pi/h],$$

где $R = R_0/\gamma$ (см. [27]), и представляет собой целевое неравенство (7).

Второе неравенство в (15) имеет следующую эквивалентную форму:

$$(16) \quad T_{yw}^\top(e^{-j\omega h}) Q T_{yw}(e^{j\omega h}) < \gamma^2 I, \quad \omega \in [0, \pi/h].$$

Лемма 1. Пусть выполняется неравенство (16), тогда ошибки по регулируемым переменным устойчивой замкнутой системы (1), (2), подверженной действию возмущений из класса (3), (4), удовлетворяют неравенствам:

$$(17) \quad q_i y_{i,st}^2 < \gamma^2 \left(\sum_j^m w_j^* \right)^2, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

Если выбрать элементы диагональной весовой матрицы Q согласно равенствам

$$(18) \quad q_i = \frac{\left(\sum_j^m w_j^*\right)^2}{(y_i^*)^2}, \quad i = \overline{1, m_2},$$

тогда из неравенств (17) следует выполнение целевых неравенств (9) поставленной задачи.

Суммируя, сформулируем главный результат статьи.

Теорема 1. Регулятор (2) с матрицами (12) разрешает задачу 1, если коэффициенты весовой матрицы Q в смещенной H_∞ -задаче (13) выбраны согласно равенствам (18). Радиусы запасов устойчивости на входе объекта управления определяют диагональную матрицу $R = R_0/\gamma$, где γ получено в результате решения задачи (13).

Здесь число γ (обычно $\gamma \geq 1$) определяет также и степень достижимости радиусов запасов устойчивости, определяемых диагональной матрицей R_0 .

Можно заметить, что переход от неравенств (13) к (14), (15) добавляет свойство достаточности представленным результатам.

4. Физическая интерпретация радиусов запасов устойчивости

Важный с практической точки зрения результат можно получить, изучая матричное частотное неравенство (7), при размыкании не всех контуров управления по входу, а только по одному i -му входу. Такой подход к анализу запасов систем соответствует инженерной практике, так как допускает экспериментальную проверку на реальном объекте. Введем следующие обозначения: $w_i(z)$ – для передаточной функции системы, разомкнутой по i -му входу, и $t_i(z)$ – для передаточной функции, связывающей i -ю компоненту вектора w с i -й компонентой вектора z_1 (когда все остальные входы на рис. 1,б равны нулю). Схематично такое размыкание можно представить блочной диаграммой в левой части рис. 2, где $\tilde{w}(z)$ – передаточная функция, полученная замыканием всех обратных связей на рис. 1,б, кроме одной i -й.

Правая часть рис. 2 иллюстрирует эквивалентный вид, включающий $w_i(z)$, при этом очевидно $w_i(z) = -\tilde{w}(z)$.

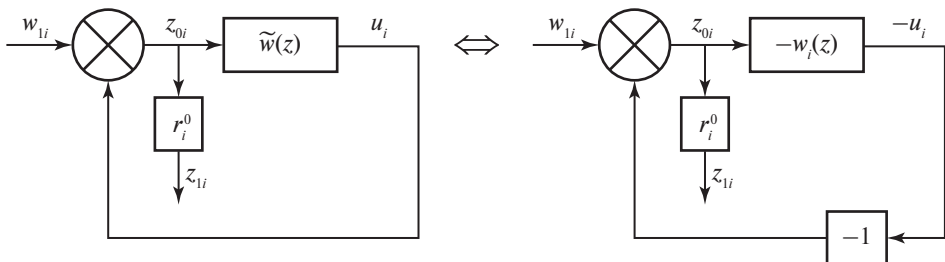


Рис. 2. Блок-схема с передаточной функцией $w_i(z)$.

Передаточные функции $t_i(z)$ и $w_i(z)$ связаны между собой соотношением

$$(19) \quad t_i(z) = r_i^0 [1 + w_i(z)]^{-1}.$$

С другой стороны, передаточная функция (19) представляет собой i -й диагональный элемент передаточной матрицы $T_{z_1 w}$. Эта матрица удовлетворяет первому неравенству в (15), тогда для ее i -го диагонального элемента можно записать [26]

$$|t_i(e^{-j\omega h})| < \gamma \Leftrightarrow t_i(e^{-j\omega h})t_i(e^{j\omega h}) < \gamma^2,$$

что, учитывая (19), окончательно приводит к скалярному аналогу (7):

$$[1 + w_i(e^{-j\omega h})][1 + w_i(e^{j\omega h})] > r_i^2, \quad i = \overline{1, m}, \quad \omega \in [0, \pi/h],$$

где $r_i = r_i^0/\gamma$.

Геометрическая интерпретация этого условия [17, 26] приводит к следующему результату.

Теорема 2. Пусть выполняется матричное частотное неравенство (7), тогда годограф Найквиста системы (1), (2), разомкнутой по i -му входу объекта, не касается круга радиусом r_i с центром в критической точке $(-1, j0)$.

Радиус запасов устойчивости r_i может быть определен через реальный эксперимент, что критически важно в практических приложениях. Если разомкнутая система на рис. 2 устойчива, то можно напрямую построить годограф Найквиста для $w_i(e^{j\omega h})$. В противном неустойчивом случае необходимо снять частотную характеристику замкнутой системы, изображенной на рис. 2, которая представляет собой передаточную функцию $t(e^{j\omega h})$, связывающую i -ю компоненту вектора w_1 с i -й компонентой вектора z_0 : $t(z) = [1 + w_i(z)]^{-1}$. Тогда радиус запасов устойчивости равен $r_i = 1/\|t\|_\infty$, см. [11, 15–17], т.е. он определяется обратным значением максимума модуля частотной характеристики функции чувствительности $t(e^{j\omega h})$ контура, изображенного на рис. 2.

Согласно теореме 2 годограф Найквиста $w(e^{j\omega h})$ не пересекает закрытый интервал вещественной оси $[-1 - r_i, -1 + r_i]$. В свою очередь круговой критерий абсолютной устойчивости [28] утверждает, что в этом случае система (1), (2) сохраняет устойчивость, если в i -й входной канал объекта вводится секторная нестационарная нелинейность из сектора $\left[\frac{1}{1+r_i}, \frac{1}{1-r_i}\right]$. Например, это может быть нестационарный коэффициент усиления $l_i(t)$, который может менять свое значение в указанном интервале произвольным образом.

Многомерный круговой критерий позволяет усилить этот результат на случай, когда нелинейности вводятся в каждом входном канале. Уравнения замкнутой системы переписываются в следующей форме:

$$(20) \quad u = -W(z)\zeta, \quad \zeta = u.$$

Такая система асимптотически устойчива (принимая во внимание метод построения регулятора (2)), так что условие минимальной устойчивости кругового критерия выполняется. Второе (линейное) уравнение в (20) заменяется на векторную нелинейность:

$$(21) \quad \zeta = \phi[k, u(k)],$$

где каждая компонента нестационарной вектор-функции $\zeta \in \mathbb{R}^m$ лежит в секторе:

$$(22) \quad \alpha_i \leq \frac{\phi_i[k, u_i(k)]}{u_i(k)} \leq \beta_i, \quad \phi_i[k, 0] = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

где $\alpha_i < 1$ и $\beta_i > 1$ – нижняя и верхняя границы секторной нелинейности.

Согласно круговому критерию [29, 30] для абсолютной устойчивости системы (20)–(22) требуется выполнение следующего частотного неравенства:

$$(23) \quad \operatorname{Re} \left\{ [I + \alpha W(e^{-j\omega h})]^\top \tau [I + \beta W(e^{j\omega h})] \right\} > 0, \quad \omega \in [-\pi/h, \pi/h],$$

где $\operatorname{Re} \{Y\} = [Y^\top (e^{-j\omega h}) + Y(e^{j\omega h})]/2$ – выделенная эрмитова часть комплексной матрицы Y . Матрица τ – положительно-определенная диагональная матрица, $\alpha = \operatorname{diag} \{\alpha_i\}$ и $\beta = \operatorname{diag} \{\beta_i\}$, $i = \overline{1, m}$ – диагональные матрицы.

Условие (23) с матрицами $\alpha = \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{1+r_i} \right\}$, $\beta = \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{1-r_i} \right\}$ и $\tau = \operatorname{diag} \{(1+r_i)(1-r_i)\}$, $i = \overline{1, m}$ приводят к неравенству

$$\operatorname{Re} \left\{ [I + R + W(e^{-j\omega h})]^\top [I - R + W(e^{j\omega h})] \right\} > 0, \quad \omega \in [-\pi/h, \pi/h],$$

где $R = \operatorname{diag} \{r_i\}$ – диагональная матрица. Последнее неравенство приводит к следующему:

$$\operatorname{Re} \left\{ [I + W(e^{-j\omega h})]^\top [I + W(e^{j\omega h})] - R^2 + V(e^{j\omega h}) \right\} > 0, \quad \omega \in [-\pi/h, \pi/h],$$

где косо-эрмитова матрица $V(e^{j\omega h}) = RW(e^{j\omega h}) - W^\top(e^{j\omega h})R$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} \{V(e^{j\omega h})\} = 0$. Это неравенство может быть представлено в форме (7), что приводит к следующему результату.

Теорема 3. Пусть задача 1 решена и/или матричное неравенство (7) выполнено, тогда нелинейная система (1), (2), (12) с секторными нестационарными нелинейностями (21) из класса (22) с $\alpha_i = 1/(1+r_i)$ и $\beta_i = 1/(1-r_i)$, $i = \overline{1, m}$, которые введены по каждому физическому входному каналу объекта (1), абсолютно устойчива (для $w = 0$).

В частном случае нелинейности могут рассматриваться в качестве нестационарных коэффициентов усиления $l_i(k)$: $\zeta_i(k) = l_i(k)u_i(k)$ с границами α_i и β_i , $i = \overline{1, m}$ из теоремы 3, которые могут независимо и произвольно менять свои значения в указанных интервалах. Это подчеркивает робастные свойства синтезируемых систем.

5. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу синтеза регулятора для дискретизированной модели многодвигательного электропривода трубоэлектросварочного агрегата (ТЭСА), использовавшейся в непрерывном времени в [21, 31]. Подобные системы имеют ясное практическое применение и известны в литературе как параллельные системы, см. раздел “Parallel systems” в [32, гл. 11].

На рис. 3 показана структурная блок-схема ТЭСА. Управления u_1 и u_2 представляют собой напряжения, подаваемые на тиристорные преобразователи, которые моделируются инерционными звеньями с параметрами $k_{\text{тир}i}$ и $T_{\text{тир}i}$, $i = 1, 2$ соответственно. Их выходы x_i , $i = 1, 2$, – выходные напряжения тиристорных преобразователей, подаваемые в якорные цепи двигателей, которые моделируются стандартным образом, используя параметры T_{ei} и k_i , $i = 1, 2$, – электромагнитные постоянные времени якорных цепей и соответствующие коэффициенты передачи; c_{mi} и c_{ei} , $i = 1, 2$, – конструктивные постоянные двигателей. Состояния x_3 и x_4 представляют собой якорные токи приводных двигателей. Моменты, развиваемые двигателями, обозначаются как $M_i = c_{mi}x_{i+2}$, $i = 1, 2$; $f = M_H$ – суммарный момент сопротивления нагрузки, J – суммарный момент инерции, приведенный к одному из валов двигателей. Состояние $x_5 = \omega$ – угловая скорость валов двигателей (главная регулируемая переменная). Измеряемыми переменными являются токи двигателей и угловая скорость их валов. Численные эксперименты показали, что если в качестве регулируемой переменной рассматривать только угловую скорость двигателей $y_3 = x_5$, то требование равнонагруженности двигателей может не выполняться и, самое главное, запасы устойчивости на выходе объекта по измеряемым переменным $y_1 = x_3$ и $y_2 = x_4$ (токам двигателей) могут быть весьма малыми [33], что недопустимо на практике. Поэтому в качестве регулируемых выбраны $y_1 = x_3$, $y_2 = x_4$ и $y_3 = x_5$. Конкретные числовые параметры модели описаны в [33].

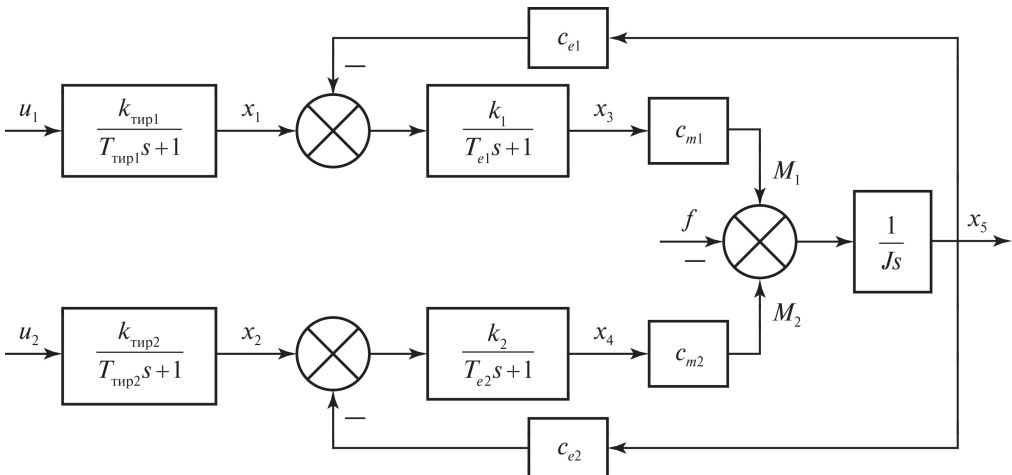


Рис. 3. Блок-схема ТЭСА.

Отметим важную особенность этой модели: управления u_1 и u_2 и внешнее возмущение приложены в существенно разных точках структурной схемы на рис. 3. Это не позволяет напрямую использовать описанный выше подход к синтезу. При этом внутренние обратные связи, образуемые коэффициентами c_{ei} , $i = 1, 2$, уменьшают влияние возмущения f на главную регулируемую переменную $x_5 = \omega$ – угловую скорость валов двигателей. Если этими связями пренебречь, что ухудшает объект управления с точки зрения обеспечения точности, то, выделив из $f = f_1 + f_2$ моменты сопротивления f_1 и f_2 , приложенные соответственно к первому и второму двигателю (как фактически и происходит на практике) и полагая $f_1 = f_2$, легко привести эти возмущения ко входам объекта u_1 и u_2 в виде возмущений w_1 и w_2 . В этом случае границы возмущений f_1^* и f_2^* пересчитываются в границы w_1^* и w_2^* по формулам

$$w_i^* = \frac{f_i^*}{k_i c_{mi} k_{тиpi}}, \quad i = 1, 2,$$

что справедливо, если f_1 и f_2 – константы. Далее показано, что наихудшее возмущение для замкнутой системы с регулятором, построенным согласно предложенному в статье подходу, действительно мало отличается от ступенчатого по отношению к величине ошибки регулирования.

Уравнения непрерывной модели ТЭСА в пространстве состояний имеют вид

$$\dot{x} = Ax + B_2 u + B_1 f, \quad y = Cx,$$

где соответствующие матрицы имеют следующие числовые значения:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -83,33 & 0 & 0 & 0 \\ 137,81 & 0 & -11,29 & 0 & -1123,16 \\ 0 & 132,46 & 0 & -11,07 & -1101,13 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,03 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 16120 & 0 \\ 0 & 13702 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Описанная система дискретизируется с периодом $h = 0,01$ с.

В соответствии с задачей 1 к показателям качества замкнутой системы предъявляются следующие требования:

- желаемые ошибки по регулируемым переменным при $|f| \leq f^* = 600$ Нм:

$$y_1^* = y_2^* = 375 \text{ A}, \quad y_3^* = 1 \text{ рад/с},$$

также к системе дополнительно предъявляется требование равномерности двигателей $y_{1,st} \approx y_{2,st}$;

- обеспечить в системе достижимые радиусы запасов устойчивости по управлениям u_1 и u_2 ;

- желаемое быстродействие системы $t_p = 0,25$ с., что дает $\alpha = e^{(3h)/t_p} = 1,0618$ и, следовательно, $|\lambda_i(A_{cl})| < 1/\alpha = 0,9418$.

Синтез регулятора проводился в среде MATLAB, где была сформирована и решена H_∞ -задача (13). Для формирования диагональной весовой матрицы $Q^{1/2}$ найдем границы эквивалентных внешних возмущений w_i , $i = 1, 2$, приложенных согласно с управлениями. Используя найденные ранее формулы для w_i^* , $i = 1, 2$, получим

$$w_1^* = \frac{f_1^*}{k_1 c_{m1} k_{\text{тир}1}} = 0,0188 \text{ В}, \quad w_2^* = \frac{f_2^*}{k_2 c_{m2} k_{\text{тир}2}} = 0,0185 \text{ В},$$

где $f_1^* = f_2^* = 300$ Нм, а параметры приводов соответствуют [33]: $k_1 = 12,21$ 1/Ом, $c_{m1} = 8,1$ Нм/А, $k_{\text{тир}1} = 161,2$ и $k_2 = 11,965$ 1/Ом, $c_{m2} = 8,262$ Нм/А, $k_{\text{тир}2} = 164,424$. Окончательно согласно (18) для весовых коэффициентов получим

$$q_1^{1/2} = \frac{w_1^* + w_2^*}{y_1^*} \approx 10^{-4} \text{ Ом}, \quad q_2^{1/2} = q_1^{1/2} \approx 10^{-4} \text{ Ом}, \quad q_3^{1/2} = \frac{w_1^* + w_2^*}{y_3^*} = 0,037 \frac{\text{Вс}}{\text{рад}}.$$

Матрица R_0 желаемых радиусов запасов устойчивости по входу выбрана как

$$R_0 = \text{diag} [r^0 \quad r^0], \quad r^0 = 0,7.$$

В результате решения H_∞ -задачи был найден дискретный регулятор $K(z)$, матрицы которого в пространстве состояний имеют вид:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0,345956 & -0,009928 & -0,000697 & 0,0025 & -0,056187 \\ -0,008343 & -0,767521 & -0,017857 & -0,047834 & 0,007471 \\ 0,073728 & -0,017642 & -0,698692 & -6,373 \times 10^{-5} & -0,009095 \\ -0,100859 & 0,798642 & -0,001513 & 0,030154 & -0,088679 \\ 2,788025 & 0,022924 & 0,041603 & 0,024368 & -0,465253 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -0,000617 & -0,017424 & -2,871137 \\ 0,792006 & -1,103803 & 1,684791 \\ -0,99029 & -0,770164 & 12,026577 \\ -0,582481 & 0,746858 & -0,299745 \\ 0,011564 & 0,039367 & 11,985945 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0,006534 & 0,005311 \\ 0,000239 & -0,001499 \\ -0,002763 & -0,002579 \\ 0,000115 & -9,579 \times 10^{-5} \\ -0,000843 & -0,001116 \end{bmatrix}^\top,$$

$$D_c = \begin{bmatrix} -0,002889 & -0,001835 & -5,217 \times 10^{-6} \\ -0,001533 & -0,003218 & -4,493 \times 10^{-6} \end{bmatrix},$$

при этом $\gamma = 0,866$, что дает гарантированный радиус запасов устойчивости на входах объекта $r_1 = r_2 = r^0/\gamma = 0,808$ и является весьма значительным с инженерной точки зрения. Фактические значения r_1 и r_2 будут определены ниже.

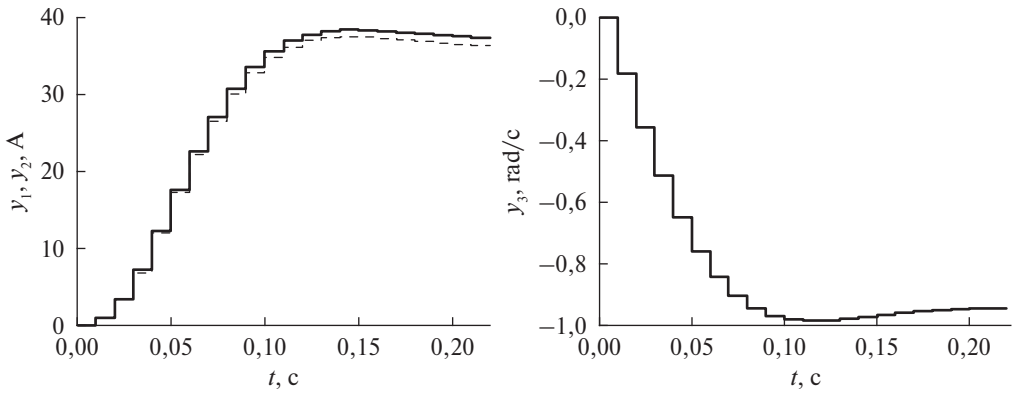


Рис. 4. Моделирование замкнутой системы при $f = 600$ Нм: слева – выходы y_1 и y_2 , справа – y_3 .

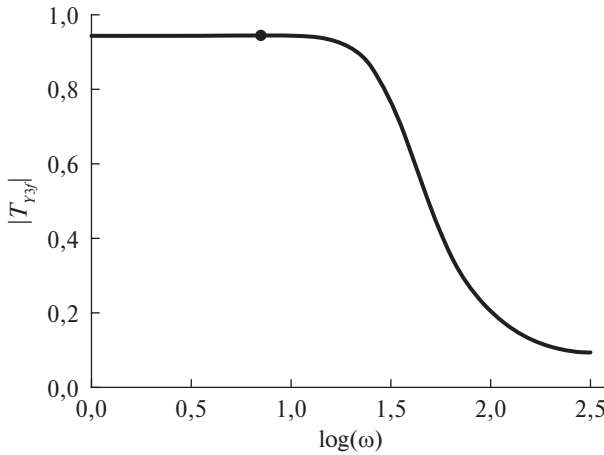


Рис. 5. Модуль частотной характеристики $|T_{y_3f}|$.

Собственные значения матрицы замкнутой системы A_{cl} удовлетворяют неравенству

$$\max |\lambda_i(A_{cl})| = 0,8019 < 1/\alpha,$$

из которого следует, что требования к быстродействию системы удовлетворены.

Результаты моделирования замкнутой системы при действии ступенчатого внешнего возмущения $f = 600$ Нм показаны на рис. 4. Графики переходных процессов (слева изображены сплошной линией – y_1 , прерывистой – y_2 , справа – y_3) демонстрируют, что требования к точности выполняются по всем регулируемым переменным, а для y_1 и y_2 также выполняется требование равномерности нагруженности приводов. Этот же рисунок демонстрирует, что фактическое время регулирования соответствует заданному желаемому $t_p = 0,25$ с.

На рис. 5 изображена амплитудно-частотная характеристика передаточной функции замкнутой системы от внешнего возмущения к главной ре-

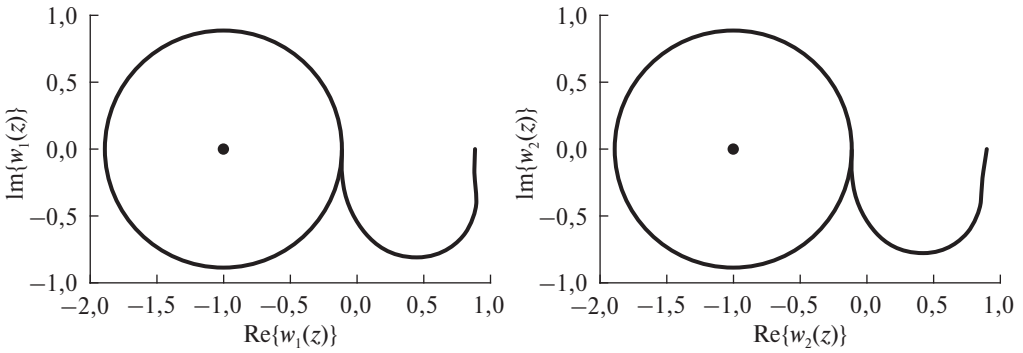


Рис. 6. Радиусы запасов устойчивости и годографы Найквиста (по входам): слева – $w_1(z)$, справа – $w_2(z)$.

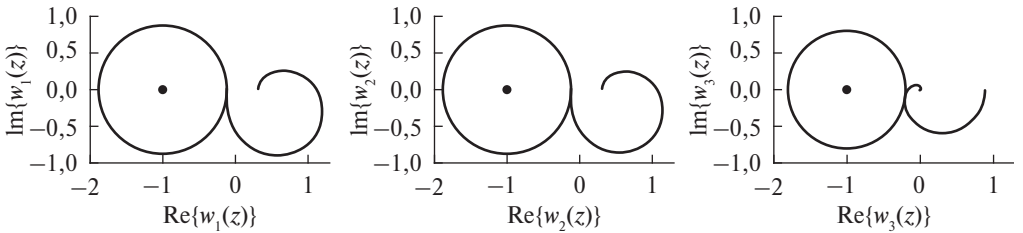


Рис. 7. Радиусы запасов устойчивости и годографы Найквиста (по выходам).

гулируемой переменной $|T_{y_3f}|$ (промасштабированная амплитудой возмущения 600). Ее максимум приходится на частоту $\omega = 7,14$ рад/с и равняется 0,945 рад/с, при этом значение модуля частотной характеристики для ступенчатого возмущения (при $\omega = 0$) равно 0,944 рад/с, т.е. ошибка при наихудшем возмущении действительно мало отличается от ошибки при ступенчатом возмущении, как и было оговорено ранее.

Заметим, что установившаяся ошибка по главной регулируемой переменной оказалась весьма близкой к заданной, что говорит о невысокой степени достаточности метода синтеза по этому показателю.

Фактические робастные свойства замкнутой системы на входе и выходе определяются с помощью годографов Найквиста разомкнутой системы, построенных при размыкании в соответствующих точках.

На рис. 6 показаны годографы Найквиста разомкнутой системы: слева при размыкании по входу u_1 , справа – u_2 . На рис. 6 показаны также критические точки $(-1, j0)$, вокруг которых построены окружности с радиусами слева $r_1 = 0,881$, справа $r_2 = 0,889$, которые определяют фактические радиусы запасов устойчивости на входе объекта управления.

На рис. 7 также показаны годографы Найквиста системы при размыкании по выходам: слева направо изображены соответственно случаи размыкания по y_1 , y_2 и y_3 . Как и для входов, на рис. 7 изображены окружности, радиусы

которых равны соответствующим фактическим радиусам запасов устойчивости по выходам: $r_1 = 0,882$, $r_2 = 0,887$, $r_3 = 0,803$.

Отметим, что синтезированный регулятор обеспечивает высокие запасы устойчивости по всем входам и выходам.

Отдельно заметим, что системы, разомкнутые по отдельным входам и выходам объекта, устойчивы, что весьма важно при возможном насыщении соответствующих сигналов и выходе их на полку.

Следует особо подчеркнуть, что построенный дискретный регулятор обеспечивает значительно более высокие радиусы запасов устойчивости по всем управляющим и измеряемым переменным (кроме главной – угловой скорости), нежели построенные ранее для данного объекта непрерывные регуляторы [21, 31, 33]. В частности, в [21] радиус запасов устойчивости по всем выходам (где он и обеспечивался) и входам составил величину порядка 0,45, а по главной регулируемой переменной – 0,99.

6. Заключение

В статье предложен подход к синтезу дискретных регуляторов по выходу многомерных систем, которые обеспечивают желаемые или достижимые показатели качества управления: ошибки по каждой регулируемой переменной, время регулирования и радиусы запасов устойчивости на входе объекта управления.

Класс внешних возмущений, рассматриваемых в статье, достаточно широк и охватывает поэлементно ограниченные функции $\forall k |w_i(k)| \leq w_i^*$, $i = \overline{1, m}$. Надо отметить, что непрерывным прообразом таких возмущений являются непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции времени, что позволяет их представить абсолютно сходящимся рядом Фурье [21], подобные возмущения только и встречаются в инженерной практике.

Укажем на некоторые положительные черты метода синтеза, выгодно отличающие его от известных:

1. Решение задачи сводится к стандартной дискретной процедуре H_∞ -оптимизации, в рамках которой даны аналитические формулы для выбора весовых коэффициентов функционала оптимизации по заданной точности.

2. Дана весьма важная с инженерной точки зрения физическая интерпретация частотного матричного неравенства для передаточной матрицы разомкнутой системы (гарантирующего в отличие от [21] собственные индивидуальные радиусы запасов устойчивости) на языке годографов Найквиста разомкнутой системы по i -му входу объекта.

3. Доказана абсолютная устойчивость замкнутой системы с секторными нелинейностями, которые могут присутствовать на всех физических входах объекта, причем размер сектора нелинейности по каждому входу однозначно определяется радиусами запасов устойчивости, гарантируемыми построенным регулятором, что также важно с инженерной точки зрения.

4. Порядок регулятора не превышает порядка объекта, что весьма ценно в практических приложениях.

5. Степень достаточности метода существенно ниже ранее предложенных [21, 31] за счет двукратного уменьшения числа блочных элементов передаточной матрицы замкнутой системы (13), к которой применяется техника H_∞ -оптимизации.

Последнее стало возможным благодаря приложению внешнего возмущения согласно с управлением. Это условие можно считать выполненным для подавляющего большинства электромеханических систем, поскольку физически управление с цифрового регулятора не прямо подается на объект управления, а через исполнительное устройство, которое является усилителем мощности с коэффициентом усиления много больше единицы. Это объясняет существенно более значительное влияние возмущения, приложенного согласно с управлением, на регулируемые переменные, нежели возмущения, приложенного как момент нагрузки. Предложенный подход к синтезу регуляторов иллюстрируется примером, непосредственно связанным с инженерной практикой (ТЭСА – агрегат, работающий на Электростальском заводе тяжелого машиностроения).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Вынужденные колебания (при $k \rightarrow \infty$) на выходе системы (1), (2) описываются выражением:

$$(П.1) \quad y_i(k) = \sum_{j=1}^{\infty} a_i(\omega_j) \sin(\omega_j kh + \phi_i(\omega_j)), \quad i = \overline{1, m_2},$$

где $a_i(\omega_j) \geq 0$ и $\phi_i(\omega_j)$ – соответственно амплитуды и фазы колебаний на выходе объекта, вызванные j -й гармоникой во входном сигнале (3).

Сигнал (П.1) описывает установившийся процесс на выходе объекта. В момент времени $t_p = k_p h$ он отличается от фактического значения выхода объекта не более чем на 5% из-за дискретной функции $e_i(k)$, которая сходится к нулю со скоростью геометрической прогрессии, поэтому в дальнейшем выходной сигнал объекта $y_i(k)$ рассматривается без этих составляющих.

Амплитуды колебаний каждой координаты вектора y с частотой ω_j в (П.1) представляют собой абсолютные значения соответствующих компонент комплексно-сопряженных векторов $T_{yw}(e^{j\omega_j h})w_+^{(j)}$ и $T_{yw}(e^{-j\omega_j h})w_-^{(j)}$, где

$$w_+^{(j)} = [w_{1j}e^{j\phi_{1j}}, w_{2j}e^{j\phi_{2j}}, \dots, w_{mj}e^{j\phi_{mj}}]^T,$$

$$w_-^{(j)} = [w_{1j}e^{-j\phi_{1j}}, w_{2j}e^{-j\phi_{2j}}, \dots, w_{mj}e^{-j\phi_{mj}}]^T.$$

В самом деле можно переписать j -ю гармонику входного вектора w как $(w_+^{(j)}e^{j\omega_j kh} - w_-^{(j)}e^{-j\omega_j kh})/(2j)$.

Ищем частное решение $x_{cl}(k)$ уравнений замкнутой системы (1), (2) при $w(k) = w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh}$, обозначая уравнения замкнутой системы следующим образом:

$$(П.2) \quad \begin{aligned} x_{cl}(k+1) &= A_{cl}x_{cl}(k) + B_{cl}w(k), \\ y(k) &= C_{cl}x_{cl}(k), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где матрица A_{cl} описана ранее, $B_{cl} = [B^\top, 0^\top]^\top$, $C_{cl} = [C, 0]$. Подставляя $w(k) = w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh}$ в первую формулу в (П.2), получаем

$$x_{cl}(k+1) = A_{cl}x_{cl}(k) + B_{cl}w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh}.$$

Частное решение системы представляется в форме $x_{cl}(k) = x^{(j)} e^{j\omega_j kh}$, где $x^{(j)} \in \mathbb{C}^{n+n_c}$ – вектор комплексных чисел, тогда $x_{cl}(k+1) = x^{(j)} e^{j\omega_j (k+1)h} = x^{(j)} e^{j\omega_j h} e^{j\omega_j kh}$. После подстановки последнего выражения в (П.2) имеем

$$x^{(j)} e^{j\omega_j h} e^{j\omega_j kh} = A_{cl}x^{(j)} e^{j\omega_j kh} + B_{cl}w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh},$$

что после некоторых упрощений дает

$$x^{(j)} = \left(e^{j\omega_j kh} I - A_{cl} \right)^{-1} B_{cl}w_+^{(j)}.$$

Тогда $x_{cl}(k) = \left(e^{j\omega_j kh} I - A_{cl} \right)^{-1} B_{cl}w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh}$ и, учитывая $y(k) = C_{cl}x_{cl}(k)$, можно записать:

$$y_+(k) = T_{yw}(e^{j\omega_j h})w(k),$$

где $T_{yw}(e^{j\omega_j h}) = C_{cl} \left(e^{j\omega_j kh} I - A_{cl} \right)^{-1} B_{cl}$ – передаточная матрица от w к y . По аналогии для $w(k) = w_-^{(j)} e^{-j\omega_j kh}$ можно получить $y_-(k) = T_{yw}(e^{-j\omega_j h})w_-^{(j)} e^{-j\omega_j kh}$.

Согласно принципу суперпозиции для j -й гармоники выходного вектора y с компонентами из (П.1) выводится

$$(y_+ - y_-)/(2j) = \left[T_{yw}(e^{j\omega_j h})w_+^{(j)} e^{j\omega_j kh} - T_{yw}(e^{-j\omega_j h})w_-^{(j)} e^{-j\omega_j kh} \right] / (2j).$$

Очевидно, что $a_i^2(\omega_j) = y_i - y_{i+}$, где y_{i-} и y_{i+} соответственно i -ые компоненты векторов y_- и y_+ . Тогда, принимая во внимание диагональную структуру матрицы Q , можно записать:

$$\sum_{i=1}^{m_2} q_i a_i^2(\omega_j) = y_-^\top Q y_+ = w_-^{(j)\top} T_{yw}^\top(e^{-j\omega_j h}) Q T_{yw}(e^{j\omega_j h}) w_+^{(j)},$$

и рассматривая правую часть неравенства (16), получаем

$$\sum_{i=1}^{m_2} q_i a_i^2(\omega_j) \leq \gamma^2 w_-^{(j)\top} w_+^{(j)} = \gamma^2 \sum_{p=1}^m w_{pj}^2,$$

тогда $q_i a_i^2(\omega_j) \leq \gamma^2 w_-^{(j)\top} w_+^{(j)} = \gamma^2 \sum_{p=1}^m w_{pj}^2$, $i = \overline{1, m_2}$.

После извлечения квадратных корней из обеих частей последнего неравенств получаем:

$$\sqrt{q_i} a_i(\omega_j) \leq \gamma \sqrt{\sum_{p=1}^m w_{pj}^2} \leq \gamma \sqrt{\left(\sum_{p=1}^m w_{pj} \right)^2}, \quad i = \overline{1, m_2},$$

откуда следует, что $\sqrt{q_i} a_i(\omega_j) \leq \gamma \sum_{p=1}^m w_{pj}$, $i = \overline{1, m_2}$. Просуммировав по всем частотам, имеем

$$\sqrt{q_i} \sum_{j=1}^{\infty} a_i(\omega_j) \leq \gamma \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} w_{pj}, \quad i = \overline{1, m_2}.$$

Далее, учитывая $y_{i,st} \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_i(\omega_j)$, $i = \overline{1, m_2}$ и (4), окончательно получим:

$$\sqrt{q_i} y_{i,st} \leq \gamma \sum_{p=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} w_{pj} \leq \gamma \sum_{p=1}^m w_p^*, \quad i = \overline{1, m_2},$$

что подразумевает (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления: автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980.
2. *MacFarlane A.G.J.* The development of frequency-response methods in automatic control // IEEE Trans. Autom. Control. 1979. V. 24. No. 2. P. 250-265.
3. Основы автоматического регулирования / под ред. *Солодовникова В.В.* М.: Гос. научн.-техн. изд-во машиностроит. лит-ры, 1954.
4. *Солодовников В.В.* Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 1,2. М.: Машиностроение, 1967.
5. *Бесекерский В.А., Фабрикант Е.А.* Динамический синтез систем гироскопической стабилизации. Л.: Судостроение, 1968.
6. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.
7. *Барабанов А.Е.* Синтез минимаксных регуляторов. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996.
8. *Dahleh M., Diaz-Bobillo I.J.* Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach. N.J.: Prentice-Hall, 1995.
9. *Zhou K., Doyle J., Glover K.* Robust and Optimal Control. N.J.: Prentice-Hall, 1996.
10. *Zhou K., Doyle J.* Essentials of Robust Control. N.J.: Prentice-Hall, 1998.
11. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. N.J.: John Wiley & Sons, 2006.

12. *Честнов В.Н.* Фундаментальные особенности дискретных систем управления и достижимые инженерные показатели качества // Материалы 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). 2024. С. 75–79.
13. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
14. *Александров А.Г.* Критерии грубости нестационарных систем автоматического регулирования // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1980. С. 3–14.
15. *Честнов В.Н.* Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞ -оптимизации // АиТ. 1999. № 7. С. 100–109.
Chestnov V.N. Synthesis of Controllers for Multivariate Systems with a Given Radius of Stability Margin by the H_∞ -optimization Method // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 7. P. 986–993.
16. *Aström K.J., Murray R.M.* Feedback systems: an introduction for scientists and engineers. N.J.: Princeton University Press, 2008.
17. *Честнов В.Н.* Синтез дискретных H_∞ -регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости и времени регулирования // АиТ. 2014. № 9. С. 65–82.
Chestnov V.N. Synthesis of Discrete H_∞ -Controllers with Given Stability Margin Radius and Settling Time // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 9. P. 1593–1607.
18. *Честнов В.Н.* Предельно достижимая точность линейных систем с дискретными регуляторами // АиТ. 2014. № 2. С. 193–214.
Chestnov V.N. Maximum Achievable Precision of Linear Systems with Discrete Controllers // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 2. P. 333–350.
19. *Честнов В.Н.* Синтез робастных H_∞ -регуляторов многомерных систем по заданной степени устойчивости // АиТ. 2007. № 3. С. 199–205.
Chestnov V.N. Design of Robust H_∞ -controllers of Multivariable Systems Based on the Given Stability Degree // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 557–563.
20. *Честнов В.Н., Шатов Д.В.* Синтез одномерных регуляторов по заданному показателю колебательности: модальный и H_∞ -подходы // Проблемы управления. 2019. № 2. С. 2–8.
21. *Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе H_∞ -оптимизации // АиТ. 2019. № 10. С. 132–152.
Chestnov V.N. Synthesis of Multivariable Systems According to Engineering Quality Criteria Based on H_∞ -Optimization // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 10. P. 1861–1877.
22. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Design of H_∞ Discrete-Time Controllers for Multivariable Systems Via Given Engineering Performance Indices // Proc. of 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019). 2019. P. 424–429.
23. *Честнов В.Н., Шатов Д.В.* Синтез дискретных регуляторов многомерных систем по инженерным критериям качества // Материалы 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). 2024. С. 418–422.
24. *Честнов В.Н.* Синтез H_∞ -регуляторов многомерных систем заданной точности и степени устойчивости // АиТ. 2011. № 10. С. 170–185.

- Chestnov V.N.* Synthesizing H_∞ -Controllers for Multidimensional Systems with Given Accuracy and Degree of Stability // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 10. P. 2161–2175.
25. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Control: Linear Quadratic Methods, NJ: Prentice-Hall, 1989.
26. The Control Handbook / *Ed. Levine W.S.* IEEE Press, 1996
27. *Честнов В.Н., Шатов Д.В.* Синтез робастных регуляторов многомерных систем при нестационарных параметрических и ограниченных внешних возмущениях // *АиТ*. 2024. № 6. С. 19–37.
Chestnov V.N., Shatov D.V. Robust Controller Design for Multivariable Systems under Nonstationary Parametric Variations and Bounded External Disturbances // *Autom. Remote Control*. 2024. V. 85. No. 6. P. 562–575.
28. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977.
29. *Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I // *АиТ*. 1967. № 9. С. 59–72.
Yakubovich V.A. Absolute Stability of Pulse Systems with Several Nonlinear or Linear Non-Stationary Blocks. I // *Autom. Remote Control*. 1967. V. 28. No. 9. P. 1301–1313.
30. *Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. II // *АиТ*. 1968. № 2. С. 81–101.
Yakubovich V.A. Absolute Stability of Pulse Systems with Several Nonlinear or Linear Non-Stationary Blocks. II // *Autom. Remote Control*. 1968. V. 29. No. 2. P. 244–263.
31. *Chestnov V.N., Shatov D.V.* Multivariable Systems Design of Desired Accuracy Based on LQ and H_∞ Optimization Procedures // *Proc. of the 2018 European Control Conference (ECC-2018)*. 2018. P. 2511–2516.
32. *Åström K.J., Hagglund T.* Advanced PID control. NC: ISA, 2006.
33. *Честнов В.Н., Шатов Д.В.* Синтез многомерных следящих систем по инженерным критериям качества на основе H_∞ -подхода // *Проблемы управления*. 2021. № 3. С. 33–41.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 20.03.2024

После доработки 06.12.2024

Принята к публикации 17.12.2024